دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
گروه انرژیِ بالا

عنوان:

گرانشِ کوانتومی دوبعدی و سه‌بعدی

نگارش:

حسین محمدی

استاد راهنما:

امین فرجی آستانه

آذر ماه ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدمه

گرانش کوانتومی در ابعاد پایین، مانند دو و سه‌بعد، اهمیت ویژه‌ای در فیزیک نظری دارد زیرا این مدل‌ها به عنوان آزمایشگاه‌هایی ساده‌تر برای درک ویژگی‌های گرانش کوانتومی عمل می‌کنند. این مدل‌ها به ما امکان می‌دهند ساختارهای ریاضی و دینامیک‌های پیچیدهٔ نظریهٔ گرانش کوانتومی را بررسی کنیم و مفاهیمی مانند سیاهچاله‌ها، انتروپی و هم‌چنین تقارن‌ها را به زبان ساده‌تر و ملموس‌تری مطالعه نماییم.

محتوای این پایان‌نامه به این شکل است.

با مدل‌های دوبعدی دیلاتونی شروع می‌کنیم؛ می‌دانیم که گرانش دوبعدی، بدون دیلاتون، از لحاظ ساختاری و حتی مفهومی نسبتا بی‌محتواست. پس، به‌مدلِ گرانشیِ JT می‌پردازیم. در سطح کلاسیک به این مدل نگاه می‌کنیم و نگاهی به انگیزه‌های بررسی این مدل، حل‌های کلاسیک و ارتباطش با نظریه‌ی مکانیک کوانتومی شوارتزی [1] می‌کنیم. در سطح کوانتومی هم بررسی‌مان را پیش می‌بریم. اول از دیدگاه اختلالی و در سطح تک حلقه این نظریه را بررسی می‌کنیم و سپس توابع همبستگیِ دو و چهارـ نقطه‌ای را صرفا نقل می‌کنیم؛ به‌دست آوردن این توابع چندنقطه‌ای نیاز به ابزارهای پیشرفته‌تر دارند که به مراجع مناسب‌شان ارجاع داده‌ایم. در آخر هم نگاهی به سهم‌های کرم‌چاله‌ای می‌اندازیم و اهمیت حضورشان را درک می‌کنیم.

بحث‌مان درموردِ گرانش سه‌بعدی را با نگاهی به دوگانی این نظریه با مدلِ Chern-Simons آغاز می‌کنیم و این دوگانی را درسطحِ کنشِ کلاسیک نگاه می‌کنیم. درنظریه‌های پیمانه‌ای، آن‌چه که مهم است شرایطِ افتِ میدان‌های پیمانه‌ای است، چرا که این شرایط افت فیزیکِ مسئله را تعیین می‌کنند. با انتخابِ

[1] این نظریه، تحت تقارن $\mathrm{SL}(۲,\mathbb{R})$ ناورداست.

شرایطِ افتِ Brown-Henneaux برای فضای مجانبا پاددوسیته و هم‌چنین شرطِ افتِ BMS برای فضای مجانبا تخت، به بررسیِ تقارن‌های مجانبی می‌پردازیم. می‌بینیم که این شرطِ افت برای فضای مجانبا پاددوسیته، راهنمایی به دوگانی پیمانه/گرانش است؛ نتیجه‌ای که حدود ده سال پیش از بیانِ این دوگانی به زبانِ مدرن گرفته شد. همینطور می‌بینیم که گروه تقارن‌های پیمانه‌ای فضای تخت هم گروهِ توسعه‌ی مرکزی یافته‌ی گروه پوانکاره، یعنی گروهِ $BMS_۳$ است.

درنهایت، به بررسی توابع پارش گرانش خالیِ پاددوسیته می‌پردازیم و نقایصِ احتمالی این نظریه‌ی گرانشِ کوانتومی را برمی‌شماریم. راه‌های احتمالی را تحتِ عنوان پیشنهاد برای اصلاحِ نظریه گرانش خالی در فضای پاددوسیته مطرح می‌کنیم.

در ضمیمه‌ها هم مقدمات ریاضیِ مباحث مطرح‌شده، ارتباط گرانش دوبعدیِ JT با مدل SYK در حدِ انرژی پایین و برخی پیش‌نیازهای مطالبِ داخل پایان‌نامه را بررسی می‌کنیم.

فصل ۲

مدلِ گرانشِ دوبعدی Jackiw–Teitelboim

در اولین بخش، به بررسی مدلِ گرانشِ دوبعدی و حل‌پذیرِ Jackiw–Teitelboim می‌پردازیم.

در سال ۱۹۸۴، رومن جکیو و کلود تایتلبوم [1] به طور مستقل گرانش JT را توسعه دادند. JT یک مدل نظریِ دوبعدی از گرانش است که اخیرا در مطالعاتِ مربوط به گرانش کوانتومی و فیزیک سیاه‌چاله‌ها مورد توجه قرار گرفته است. با وجود سادگی و حل‌پذیری آن، گرانش JT ویژگی‌های اساسی دینامیک گرانشی را به تصویر می‌کشد و به همین دلیل ابزاری ارزشمند برای بررسی مفاهیم پیچیده در یک چارچوب قابل مدیریت‌تر به شمار می‌رود.

یکی دیگر از ویژگی‌های گرانش JT ، کمک به پیش‌بینی رفتار سیاه‌چاله‌ها است؛ به ویژه در زمینه ترمودینامیک و ویژگی‌های کوانتومی آنها. این مدل به عنوان یک چارچوب ساده‌شده برای درک متناقض‌نمای اطلاعات و ماهیت آنتروپی در سامانه‌های شاملِ سیاه‌چاله استفاده می‌شود. همچنین، گرانش JT ، در حدِ انرژیِ پایین، ارتباطِ عمیقی با مدل SYK ، که مدلِ برهمکنشیِ فرمیونیِ حل‌پذیری است، دارد و در مطالعه آشوب کوانتومی و تمام‌نگاری اهمیت زیادی دارد. این ارتباط باعث پیشرفت‌هایی در دوگانی AdS/CFT شده است و یک چارچوب پایین‌تر برای بررسی دوگانگی بین گرانش و نظریه‌های میدان کوانتومی فراهم می‌کند.

در کاربرد، گرانش JT برای بررسی دینامیک سیاه‌چاله‌های نزدیک به حالت‌های فرینه و ظهور فضا-زمان از درهم‌تنیدگی کوانتومی استفاده می‌شود. از این مدل برای آزمایش ایده‌های مربوط به تصحیحات

[1] R. Jackiw and C. Teitelboim

کوانتومی در گرانش کلاسیک و بررسی تعامل بین هندسه و مکانیک کوانتومی بهره برده می‌شود. افزون بر این، گرانش JT با نظریه‌ی ماتریس‌های تصادفی هم پیوندهایی دارد که پلی میان سیستم‌های گرانشی و مکانیک آماری ایجاد می‌کند. تمامی این ارتباطا و کاربردها، درک ما از فیزیک بنیادی را غنی‌تر و کامل‌تر می‌سازد.

۲-۱ نگاهی به مدل‌های گرانشی دیلاتونی

از کلی‌ترین کنش گرانشی دوبعدی تک‌میدانه، که در آن حداکثر مشتقات دوم میدان دیلاتونی وجود دارد، شروع می‌کنیم. در نشانگان اقلیدسی، کنش به این شکل است

$$I = -\frac{1}{16\pi G_N}\int_{\mathcal{M}} d^2x\sqrt{g}\Big(U_1(\tilde{\Phi})R + U_2(\tilde{\Phi})g^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\Phi}\partial_\nu\tilde{\Phi} + U_3(\tilde{\Phi})\Big), \qquad (۲-۱-۱)$$

که $g^{\mu\nu}$ متریک دوبعدی و $\tilde{\Phi}$ میدان دیلاتونی است.

اگرچه در نگاه اول، کنشِ (۲-۱-۱) با سه تابع $U_1(\tilde{\Phi}), U_2(\tilde{\Phi})$ و $U_3(\tilde{\Phi})$ پارامتربندی می‌شود، اما دوتا از این توابع اضافی هستند؛ یعنی می‌توانیم آنها را با بازتعریف میدان و بازمقیاس متریک حذف کنیم.

اول از همه، با بازتعریف $\tilde{\Phi} \to \Phi = U_1(\tilde{\Phi})$ می‌توانیم جفتیدگی میدان دیلاتونی به اسکالر ریچی را خطی کنیم [۲] . درمرحله‌ی بعد، با یک تبدیل وایل می‌توانیم $U_2(\tilde{\Phi})$ را هم کاملا حذف کنیم؛ یعنی عملا میدان دیلاتونی را در تئوری دلخواه، بدون جمله‌ی جنبشی بنویسیم.

می‌دانیم که تحت یک بازمقیاس موضعی، اسکالر ریچی به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$g'_{\mu\nu} = e^{2\omega}g_{\mu\nu}, \qquad \sqrt{g}R \to \sqrt{g'}R' = \sqrt{g}\big(R - 2\nabla^2\omega\big) \qquad (۲-۱-۲)$$

به سادگی و با انتخاب $\omega(x) = \frac{1}{2}\int^{\Phi(x)}\breve{U}_2(\Phi')d\Phi'$ می‌توانیم جمله‌ی جنبشی را در کنش (۲-۱-۱) حذف کنیم.

حذف جمله‌ی جنبشی از کنش با تبدیل وایل

---

[۲] توجه کنید که این بازتعریف همیشه معتبر نیست؛ تنها هنگامی این تبدیل معکوس‌پذیر است که مقدار $U_1'(\tilde{\Phi}) \neq 0$ باشد. در غیر این‌صورت، نمی‌توانیم جمله‌ی جنبشی را برحسب میدان‌های جدید بازنویسی کنیم.

در این‌جا، منظور ما از $\breve{U}_2(\Phi)$ ، تابع اولیه‌ی $U_2(\Phi)$ است. کافی است مشتقات را روی ω اثر دهیم:

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \frac{1}{2}\int^{\Phi(x)} \breve{U}_2(\Phi')d\Phi' \\
\nabla_\mu\omega(x) &= \frac{1}{2}\nabla_\mu\int^{\Phi(x)} \breve{U}_2(\Phi')d\Phi' = \frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\, \breve{U}_2(\Phi) \\
\nabla^\mu\nabla_\mu\omega(x) &= \frac{1}{2}\nabla^2\Phi\breve{U}_2(\Phi) + \frac{1}{2}\nabla^\mu\Phi\nabla_\mu\Phi\, \underbrace{\breve{U}_2'(\Phi)}_{U_2(\Phi)}
\end{aligned} \tag{۲-۱-۳}$$

شیوه‌ی اثردهی مشتقات، روی این انتگرال، دقیقا مثل قضیه‌ی اساسی حساب‌دیفرانسیل است؛ یعنی با رابطه‌ی زیر

$$\frac{d}{dt}\int_{f(x)}^{g(x)} H(x,t)dt = g'(x)H(x,g(x)) - f'(x)H(x,f(x)) + \int_{f(x)}^{g(x)}\frac{\partial H(x,t)}{\partial x}dt.$$

جمله‌ی اولِ (۲-۱-۳) اگرچه به‌نظر اضافی است، اما با انتگرال‌گیری جزء به جزء، می‌توان مشتقات را روی پتانسیل $\breve{U}_2(\Phi)$ انداخت و به آن به چشم یک جمله‌ی پتانسیل جدید نگاه کرد که در $U_3(\Phi)$ در (۲-۱-۱) جذب می‌شود. جمله‌ی دوم دقیقا همان‌چیزی است که با جاگذاری در (۲-۱-۲) ، جمله‌ی جنبشی میدان دیلاتونی را حذف می‌کند.

درنهایت، چیزی که باقی می‌ماند، این کنش است:

$$I[g,\Phi] = -\frac{1}{16\pi G_N}\int_{\mathcal{M}} d^2x\sqrt{g}\Big(\Phi R + U(\Phi)\Big), \tag{۲-۱-۴}$$

که تنها با یک پارامتر، یعنی با پتانسیل دیلاتونی $U(\Phi)$ پارامتربندی شده است.

برخی نکات در مورد گرانش دیلاتونی دوبعدی:

۱. این تقلیل کنش، که در بالا دیدیم، در سطح کلاسیک انجام شد؛ کاهشهایی مثل این ، لزوما در سطح کوانتومی قابل انجام نیستند؛علی‌الخصوص وقتی بعدا قرار است به ترمودینامیک مدل‌های حاصل نگاه کنیم ، اغلب جملات سطحی انتگرال برایمان اثرات غیربدیهی ایجاد می‌کنند.

۲. الان مدل‌هایی که حاصل‌ضرب دو مشتق دیلاتون در آن حضور داشت بررسی شد؛ می‌توان به کنش در حضور مشتقات بیشتر را هم نگاه کرد. با یک بررسی سطحی می‌توان فهمید که ثابت جفتیدگی این مدل‌ها باید بعد طول داشته باشد؛ یعنی این مدل‌ها بازبهنجارناپذیر هستند. البته در دوبعد که متریک هیچ درجه‌آزادی موضعی ندارد، بازبهنجارپذیری هیچ مشکلی ندارد [۳] .

[۳] یادمان هست که برای رفع مشکل بازبهنجارش‌ناپذیری، باید جملاتی به کنش اضافه کنیم که در هر مرتبه‌ی اختلال،

۳. میدان دیلاتونی، یک ثابت نیوتون وابسته به فضازمان معرفی می‌کند:

$$G_{\text{eff}} = \frac{G_N}{\Phi(x)} \qquad (۲-۱-۵)$$

که برای توصیف فیزیکی معادلات حرکت، لازم است که این ثابت همواره مثبت بماند.

۲-۲ گرانش JT کلاسیک

مدل‌گرانشی Jackiw–Teitelboim ، همان مدل (۲-۱-۴) است که در آن پتانسیل دیلاتونی خطی است؛ یعنی $U(\Phi) = -\Lambda\Phi$ انتخاب شده است.

$$I^{\Lambda}_{\text{JT}}[g,\Phi] = -\frac{۱}{۱۶\pi G_N}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}\Phi\big(R-\Lambda\big) \qquad (۲-۲-۱)$$

در این معادله، Λ ثابت کیهان‌شناختی مدل است. برای فضازمان پاددوسیته (AdS) ، ثابت کیهان‌شناختی را $\Lambda = -۲/L^۲$ می‌گیریم. با انتخاب $L = ۱$، کنش مدل‌مان با اندکی اصلاحات به این شکل است:

$$I_{\textbf{JT}}[g,\Phi] = -\frac{۱}{۱۶\pi G_N}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}\Phi(R+۲) - \frac{۱}{۸\pi G_N}\oint_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h}\Phi(K-۱) \qquad (۲-۲-۲)$$

برای خمینه‌های مرزدار، جمله‌ی مرزی گیبونز–هاوکینگ–یورک در این کنش مستقیما نوشته شده و همچنین پادجمله‌ی (۱-) هم برای متناهی شدن کنش در فضاهای مجانبا پاد دوسیته افزوده شده است.

همچنین در ادامه می‌بینیم که افزودن جمله‌ی توپولوژیک هم به این کنش مهم است؛ پس کنشی که در کل این بخش به بررسی‌اش می پردازیم، این است:

$$I[g,\Phi] = -S_{۰}\chi + I_{\text{JT}}[g,\Phi] \qquad (۲-۲-۳)$$

که مشخصه‌ی اویلر به شکل زیر معرفی شده است:

$$\chi = \frac{۱}{۴\pi}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}R + \frac{۱}{۲\pi}\oint_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h}K. \qquad (۲-۲-۴)$$

جمله‌ی توپولوژیک، تحت وردش متریک تغییری نمی‌کند و مقدارش دقیقا برابر مشخصه‌ی اویلر فضاست. می‌توان آن را به چشم افزودن یک عدد ثابت به کنش نگاه کرد، یعنی میدان دیلاتونی در کنش $I_{JT}[g,\Phi]$ به شکل $\Phi(x) \to \Phi_{۰} + \Phi(x)$ منتقل شود، جمله‌ی توپولوژیک بدست می‌آید؛ که $S_{۰} = \frac{\Phi_{۰}}{۴G_N}$.

دیاگرام‌های واگرا را خنثی کند. اما به شکلی استثنایی در دو بعد، چون متریک درجه‌آزادی موضعی ندارد، کنش‌آن کاملا توپولوژیک است و در دیاگرام‌ها مشکل واگرایی رخ نمی‌دهد.

۲-۲-۱ انگیزه: سیاه‌چاله‌های نزدیک به فرینه

یک انگیزه‌ی قوی برای مطالعه‌ی مدل دوبعدی JT این است که فیزیک نزدیک افق رویداد سیاهچاله‌های بعد بالایِ نزدیک به فرینه را توصیف می‌کند. بیاید برای ساده‌ترین سیاهچاله‌ی چهاربعدی، این گزاره را ببینیم؛ یعنی حدِ نزدیکِ افقِ سیاهچاله‌ی رایسنر–نوردشتروم در گرانش اینشتینی جفت شده به میدان الکترومغناطیسی را بررسی کنیم.

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(4)}} \int d^4x\sqrt{-g}(R - F^2) + S_{\text{bdy}} \tag{۲-۲-۵}$$

متریکِ فضازمان رایسنر–نوردشتروم که جواب این معادله است، به شکل زیر است.

$$ds^2 = -f(r)dr^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{۲-۲-۶}$$

آشنایی مختصر با سیاه‌چاله‌ی رایسنر–نوردشتروم

میدان الکترومغناطیسی حاصل از این جواب، تنها مولفه‌ی شعاعی میدان الکتریکی دارد که متناسب با بار Q است و به شکل عکس مجذوری افت می‌کند. افق‌های این سیاهچاله در $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ واقع شده‌اند و دمای هاوکینگ آن $T = |f'(r_+)|/4\pi$ است. حد نزدیک فرینه، مربوط به وقتی است که $M \sim |Q|$ و بنابراین، افق‌های بیرونی و درونی بسیار به‌هم نزدیک می‌شوند.

بیاید هندسه‌ی نزدیک به افق را در سیاه‌چاله‌ی نزدیک به فرینه بررسی کنیم. به‌خاطر نزدیک بودن به حالت فرینه، کمیت $\Delta M \equiv M - Q$ را بسیار کوچک می‌گیریم؛ و برای بررسی هندسه نزدیک افق، شعاع را به شکل $r = Q + Q^2\tilde{r}$ می‌نویسیم. حالا متریک (۲-۲-۵) را در این دو حد بازنویسی می‌کنیم.

اول از همه بایستی $f(r)$ را در این حدها بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2\overbrace{M}^{Q+\Delta M}}{Q}(1 + Q\tilde{r})^{-1} + \frac{Q^2}{Q^2}(1 + Q\tilde{r})^{-2} \\ &= 1 - 2\left(1 + \frac{\Delta M}{Q}\right)\left(1 - Q\tilde{r} + Q^2\tilde{r}^2\right) + (1 - 2Q\tilde{r} + 3Q^2\tilde{r}^2) \\ &= 1 - 2 - 2\frac{\Delta M}{Q} + 2Q\tilde{r} - 2Q^2\tilde{r}^2 + 1 - 2Q\tilde{r} + 3Q^2\tilde{r}^2 + \mathcal{O}(Q^3\tilde{r}^3) \\ &= -2\frac{\Delta M}{Q} + Q^2\tilde{r}^2 = Q^2\left(\tilde{r}^2 - \frac{2\Delta M}{Q^3}\right) \end{aligned} \tag{۲-۲-۷}$$

از جملاتی که هم شامل $\tilde{r}$ و هم شامل ΔM هستند، صرف‌نظر کردیم؛ چون هردوی این‌کمیت‌های بسیار کوچکند. حالا با جایگذاری در متریک (۲-۲-۵)

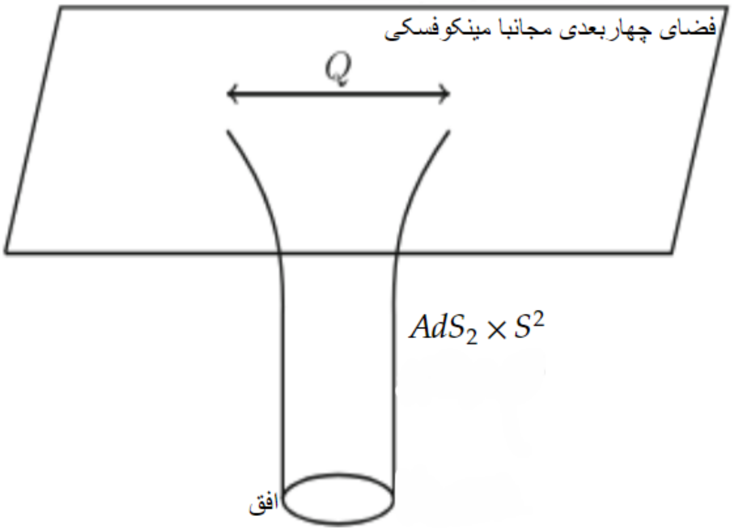
$$ds^{۲} \approx -Q^{۲}\left(\tilde{r}^{۲} - \frac{۲\Delta M}{Q^{۳}}\right)dt^{۲} + \frac{Q^{۲}d\tilde{r}^{۲}}{\tilde{r}^{۲} - \frac{۲\Delta M}{Q^{۳}}} + Q^{۲}d\Omega_{۲}^{۲} \qquad (۲-۲-۸)$$

دو جمله‌ی اول این متریک، متریک فضای پاددوسیته دوبعدی است؛ پس هندسه نزدیک افق این سیاهچاله به شکل $\mathrm{AdS}_{۲} \times S^{۲}$ است؛ که در این مختصات شعاع پاددوسیته و شعاع کره دوبعدی هر دو Q هستند.

با یک بازمقیاس طولی با ضریب $Q^{-۱}$، بدست می‌آوریم که

$$Q^{-۲}ds^{۲} \approx -(\tilde{r}^{۲} - r_h^{۲})dt^{۲} + \frac{d\tilde{r}^{۲}}{\tilde{r}^{۲} - r_h^{۲}} + d\Omega_{۲}^{۲}, \quad r_h = \sqrt{\frac{۲\Delta M}{Q^{۳}}}. \qquad (۲-۲-۹)$$

طرحی اولیه از این فضازمان در تصویر ۲-۱ آمده است.



شکل ۲-۱: طرحِ هندسی فضازمان رایسنر–نوردشتروم که به شکل هموارِی فضای مجانبا تخت مینکوفسکی را به گلوگاه $\mathrm{AdS}_{۲} \times S^{۲}$ نزدیک افق وصل می‌کند. در حد $Q \to M$ ، شعاع پاددوسیته به بی‌نهایت میل می‌کند. (عکس از [۲] برداشته شده.)

حالا اندکی هم در مورد اختلالات متریک حول حالت فرینه صحبت می‌کنیم.

اختلالات متریک را به شکل زیر پرمایش می‌کنیم:

$$ds^{۲} = \frac{۱}{\sqrt{\chi}}g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + \chi(dy^{i} + A_{\mu}^{ij}y^{j}dx^{\mu})(dy^{i} + A_{\nu}^{ij}y^{j}dx^{\nu}) + \dots$$

که سه متغیر y^{i} اختلالات کره‌ی دوبعدی را پرمایش می‌کنند و $x^{\mu} = (t, r)$ زمان و شعاع را مشخص

می‌کند. جمله‌هایی که با سه‌نقطه نشان دادیم؛ مدهای کالوزا_کلاین هستند که به علت کم جرم بودن [۴] در اختلال‌های کوچک تاثیری ندارند [۵] .

برای سادگی، در هنگردی از سیاهچاله‌ها با بار ثابت و تکانه‌زاویه‌ای صفر کار می‌کنیم. با جای‌گذاری متریک فوق، کنش اینشتین_ماکسول (۲-۲-۵) به مدل دیلاتونی تقلیل می‌یابد [۷] :

$$S[g,\chi]=\frac{۱}{۴G_N^{(۴)}}\int d^۲x(\chi R+U(\chi))+\dots,\quad U(\chi)=-\frac{۲Q^۲}{\sqrt{\chi}^۳}+\frac{۲}{\sqrt{\chi}}$$

پس اختلالات کوچک متریک از سیاهچاله‌ی رایسنر_نوردشتروم همچنان یک مدل گرانش دیلاتونی است با پتانسیل $U(\chi)$.

اگر از اختلالات کره‌ی دوبعدی صرف‌نظر کنیم و فرض کنیم که مساحت کره‌ی دوبعدی ثابت است، طوری که پتانسیل دیلاتونی جدید صفر می‌شود.

$$U(\chi=\Phi_۰)=۰\longrightarrow\Phi_۰=Q^۲$$

هندسه‌ی نزدیک به افق در سیاهچاله‌ی نزدیک به حالت فرینه بازیابی می‌شود. پس گرانش JT وقتی پدیدار می‌شود که ما اختلالات بسیار کوچک حول میدان دیلاتونی χ را نگاه می‌کنیم.

$$\chi(x)=\Phi_۰+\Phi(x),\quad \Phi\ll\Phi_۰.$$

پس تحت این شرایط، نظریه اینشتین_ماکسول در چهاربعد به گرانش JT نزدیک به افق تقلیل می‌یابد.

$$S[g,\Phi]=\frac{\Phi_۰}{۴G_N^{(۴)}}\int\sqrt{-g}R+\frac{۱}{۴G_N^{(۴)}}\int\sqrt{-g}\Phi(R+۲)+\dots$$

که در آن جملات صرفنظر شده، جفتیدگی گرانش JT به میدان‌های مادی حاضر در نظریه و همچنین مدهای سبک کالوزا_کلاین را نشان می‌دهد.

همچنین، در این چارچوب، توصیف جالبی برای جملاتی که در کنش هستند ارائه می‌دهد. در کنش اولیه (۲-۲-۳) ، می‌توانیم پارامتر $S_۰$ را با

$$S_۰=\frac{\pi\Phi_۰}{G_N^{(۴)}}=\frac{\pi Q^۲}{G_N^{(۴)}}$$

[۴] از مرتبه‌ی Q در شعاع پاددوسیته

[۵] این مدهای سبک در پس‌زمینه‌های پاددوسیته مشاهده می‌شوند؛ مثلا در توصیف نظریه ریسمان نوعِ IIB در پس زمینه $\mathrm{AdS}_۵\times S^۵$ این مدهای سبک حاضرند.

همسان کنیم. این رابطه، همان آنتروپی بکنشتاین_ هاوکینگ برای سیاهچاله‌ی رایسنر_ نوردشتروم است. در ادامه شواهد بیشتری می‌بینیم که چرا میدان دیلاتونی با آنتروپی همسان شده است.

نکته: سیاهچاله‌ی چهاربعدی رایسنر_نوردشتروم تنها سیاه‌چاله‌ای نیست که فیزیک نزدیک افقش در حالت نزدیک به فرینه با گرانش JT توصیف می‌شود. دسته‌ی بزرگی از سیاهچاله‌ها این ویژگی را دارند و به همین دلیل، یعنی جهان‌شمول بودن فیزیک سیاهچاله‌ها در نزدیکی افق و نزدیک به حالت فرینه، مطالعه‌ی جزئی‌تر مدل گرانش JT برای ما جالب است.

۲-۲-۲ تناظر JT با مدل توپولوژیک BF

در این بخش، فرمول‌بندی مرتبه‌اول گرانش JT را می‌بینیم. چون متریک دوبعدی، درجه‌ی‌آزادی موضعی ندارد؛ بنابراین نظریه گرانش دوبعدی نظریه‌ای است که درجات‌آزادیِ آن باید سرتاسری باشد، یا معادل با یک نظریه میدان توپولوژیک است. اینجا می‌بینیم که مدل‌های دوبعدی دیلاتونی، یک نظریه میدان پواسون_سیگما هستند و در مورد خاص گرانش JT ، این مدل به مدل توپولوژیک BF تقلیل می‌یابد.

بیایید این تناظر را برای خمینه‌های بسته بررسی کنیم. با شروع از کنش دیلاتونی (۲-۱-۴)، میدان‌های کمکی e_μ^a را به شکل متعارف می‌سازیم:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab} \qquad (۲-۲-۱۰)$$

که اندیس‌های a, b صفر و یک هستند. سپس با استفاده از این میدان‌های کمکی ، هموستار اسپینی $\omega^{ab} = \omega_\mu^{[ab]} dx^\mu$ را می‌سازیم.

این هموستارها، با شرط بدون پیچش بودنِ متریک (در نمایش جدیدمان) بدست می‌آیند:

$$de^a + {\omega^a}_b \wedge e^b = ۰ \qquad (۲-۲-۱۱)$$

حالا در دو بعد فضازمانی، این روابط را برای تبدیل به نمایش مرتبه‌اول داریم:

$$\begin{aligned} \omega^{ab} &= \epsilon^{ab}\omega, \\ d^۲x\sqrt{g} &= e^۰ \wedge e^۱, \\ d^۲x\sqrt{g}R &= ۲d\omega \end{aligned} \qquad (۲-۲-۱۲)$$

فصل ۳

نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی

با بیان چندین ویژگی از گرانش اینشتینی سه‌بعدی مطالعه‌مان را آغاز می‌کنیم. اگرچه ممکن است که گرانش در ابعاد پایین از واقعیت جهان دوربه‌نظر برسد، اما وجود سیاهچاله، غنای هندسی و توپولوژیک گرانشِ سه‌بعدی به واقعی‌تر کردن مدل کمک می‌کنند. همچنین ابزارهای فراوان در دسترس (مثل دوگانی AdS/CFT، تفسیرهای گرانش برحسب تئوری‌های پیمانه‌ای و...) در حل مسئله با رهیافت‌های متنوع به ما کمک شایانی می‌کنند. اول می‌بینیم که گرانش سه‌بعدی مجانبا پاددوسیته معادل با نظریه میدان لیوویل رویِ مرزِ همدیسِ استوانه‌ای است. سپس درجات آزادی موضعی این تئوری را بررسی می‌کنیم؛ می‌بینیم که درجه‌ی آزادی موضعی در این گرانش وجود ندارد. سپس شرایط افت را تعریف می‌کنیم، به دسته‌بندی تقارن‌های پیمانه‌ای می‌پردازیم و به مفهومِ تقارن‌های مجانبی می‌پردازیم که از نتایجِ تعریفِ شرایط افت روی نظریه گرانشی است. درنهایت، در مدلِ گرانشی مجانبا پاددوسیته، شرایطِ مرزی Brown-Henneauxرا در سطحِ کلاسیک نگاه می‌کنیم و تقارنِ ویراسوروی‌ِ مجانبیِ ظاهر شده را که از راهنمایی‌های اولیه به سمتِ تقارن AdS/CFT بوده است، به‌دست می‌آوریم. هم‌چنین، در فضایِ مجانبا تخت، شرطِ افتِ BMS را معرفی می‌کنیم و مفهومِ تقارن مجانبی را برای این فضازمان هم بررسی می‌کنیم.

۳-۱ دوگانیِ گرانشِ مجانبا پاددوسیته با نظریه میدان لیوویل

این دوگانی را در سطحِ کلاسیک، به‌طور کامل بررسی می‌کنیم. این بخش نیاز به مقدمات زیادی دارد که درجاهای مناسب به آن‌ها ارجاع داده شده است.

۳-۱-۱ گرانش سه‌بعدی مجانبا دوسیته به‌عنوانِ یک نظریه‌ی Chern-Simons

آنچه که Auchucarro و Townsend [۴۳] کشف کردند و مستقلا Witten [۴۴] پیدا کرد، این بود که گرانش سه‌بعدی (نه لزوما مجانبا پاددوسیته) و معادلات حرکتش معادل با یک نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons روی گروه‌های پیمانه‌ای خاصی هستند. به‌طورِ دقیق‌تر، گرانشِ خالصِ اینشتین–هیلبرت معادل با یک نظریه‌ی Chern-Simons با گروه‌پیمانه‌ای $SO(۲,۲)$ ، $ISO(۲,۱)$ و $SO(۳,۱)$ است، وقتی که ثابتِ کیهان‌شناختی، به‌ترتیب، منفی، صفر و مثبت باشد (جدولِ ۳-۱-۱ .)

Λ	گروه پیمانه‌ای
+ (دوسیته)	$SO(۳,۱)$
۰ (تخت)	$ISO(۲,۱)$
– (پاددوسیته)	$SO(۲,۲)$

جدول ۳-۱: پیمانه‌ای متناظر با نظریه‌های گرانش سه‌بعدیِ خالص در نظریه‌ی Chern-Simons معادل.

ما این نتیجه را برای فضازمانِ مجانبا پاددوسیته ثابت می‌کنیم. در این‌حالت، جبرِ لیِ $\mathfrak{so}(۲,۲)$ با روابط جابه‌جاگری زیر داده می‌شود.

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c, \quad [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c, \quad [P_a, P_b] = \epsilon_{abc}J^c, \tag{۳-۱-۱}$$

که $a, b, c \in \{۰,۱,۲\}$ و این اندیس‌ها با متریک مینکوفسکیِ سه‌بعدی بالاوپایین می‌روند. همچنین، از نمایشِ دوگانِ زیر برای مولدهای لورنتز استفاده کرده‌ایم.

$$J_a \equiv \frac{۱}{۲}\epsilon_{abc}J^{bc} \leftrightarrow J^{ab} \equiv -\epsilon^{abc}J_c, \tag{۳-۱-۲}$$

این جبر، مجهز به فرمِ دوخطی و ناتبهگن زیر است.

$$(J_a, P_b) = \eta_{ab}, \quad (J_a, J_b) = ۰ = (P_a, P_b) \tag{۳-۱-۳}$$

به ضمیمه‌ی ت نگاه کنید. آنجا دیدیم که برای گرانش سه‌بعدی مجانبا پاددوسیته، فرمول‌بندی گرانشی را برحسبِ میدان‌های کمکی e_μ^a و هموستارِ اسپینی [۱] ω_μ^a نوشتیم (رابطه‌ی (ت-۰-۱۲)).

جالب است! اندیس‌های چارچوب از صفر تا دو تعریف شده‌اند؛ دقیقا مشابه با مولدهای جبرِ $\mathfrak{so}(۲,۲)$. پس بیایید میدان‌های پیمانه‌ای A در کنش Chern-Simons را اینطور بسازیم [۲].

$$A_\mu \equiv \frac{۱}{\ell} e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a J_a \tag{۳-۱-۴}$$

توجه کنید که اندیس‌های چارچوب با اندیس‌های مولد جبر یکسان شدند. با داشتن میدانِ پیمانه‌ای و همچنین فرمِ دوخطیِ ناتبهگن از معادله‌ی (۳-۱-۳)، در کنش Chern-Simons جایگذاری می‌کنیم. می‌بینیم که جمله‌ی اول به شکل زیر است.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[A\wedge dA] &= (\frac{۱}{\ell}e^aP_a+\omega^aJ_a, \frac{۱}{\ell}de^bP_b+d\omega^bJ_b)\\ &= \frac{۱}{\ell}\left(e^a\wedge d\omega^b+\omega^a\wedge de^b\right)\eta_{ab} = \frac{۲}{\ell}e^a\wedge d\omega_a,\end{aligned} \tag{۳-۱-۵}$$

هم‌چنین جمله‌ی دوم هم با اندکی جزئیاتِ بیشتر تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}\frac{۲}{۳}\mathrm{Tr}[A\wedge A\wedge A] &= \frac{۱}{۳}\mathrm{Tr}[[A,A]\wedge A]\\ &= \frac{۱}{۳\ell}\left(\frac{۱}{\ell^۲}e^a\wedge e^b\wedge e^c + ۳\epsilon_{abc}e^a\wedge\omega^b\wedge\omega^c\right)\end{aligned} \tag{۳-۱-۶}$$

با جمعِ این دوجمله پیدا می‌کنیم [۳]:

$$S_{\mathrm{CS}}[e,\omega] = \frac{k}{۴\pi\ell}\int_{\mathcal{M}}\left(۲e^a\wedge R_a[\omega] + \frac{۱}{۳\ell^۲}\epsilon_{abc}\,e^a\wedge e^b\wedge e^c\right) \tag{۳-۱-۷}$$

و ثابتِ مرحله‌ی Chern-Simons به شکل زیر بدست می‌آید.

$$k = \frac{\ell}{۴G} \tag{۳-۱-۸}$$

نکته‌ی شایان ذکرِ دیگر این است که باتوجه به همریختیِ جبرِ لیِ [۴] $\mathfrak{so}(۲,۲)\cong\mathfrak{sl}(۲,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(۲,\mathbb{R})$

[۱] در نمایشِ دوگان مطابق رابطه‌ی (ت-۰-۱۰)

[۲] برای اطلاع بیشتر از کنش Chern-Simons به ضمیمه‌ی ث رجوع کنید.

[۳] از رابطه‌ی انحنای کارتان

$$R_a = d\omega_a + \frac{۱}{۲}\epsilon_{abc}e^a\wedge e^b\wedge e^c$$

استفاده شده تا تانسور انحنا ظاهر بشود.

[۴] صورتِ دقیقِ این نگاشتِ همریختی را می‌توانید در (۳-۳-۷) مشاهده کنید.

، می‌توانیم کنش Chern-Simons برای گروهِ پیمانه‌ایِ $\mathfrak{so}(۲,۲)$ را به شکلِ جمعی از دو کنش Chern-Simons برای گروهِ پیمانه‌ای $\mathfrak{sl}(۲,\mathbb{R})$ بنویسیم. یعنی، با تعریفِ

$$A = (e^a/\ell + \omega^a)T_a, \quad \bar{A} = (e^a/\ell - \omega^a)T_a \tag{۳-۱-۹}$$

که در اینجا، T_a مولدهای $\mathfrak{sl}(۲,\mathbb{R})$ هستند، کنش به شکل زیر تجزیه می‌شود.

$$S_{\text{CS}}[\Gamma] = S_{\text{CS}}[A] - S_{\text{CS}}[\bar{A}] \equiv S_{\text{CS}}[A,\bar{A}] \tag{۳-۱-۱۰}$$

به‌عنوانِ نکته‌ی پایانی، نگاهی هم به معادلات حرکت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که معادلات حرکت نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons همان معادلات اینشتین می‌شوند.

از بخشِ ث می‌دانیم که معادلات حرکتِ نظریه‌ی پیمانه‌ای Chern-Simons ، به شکل موضعی صفر شدنِ انحنایِ میدانِ پیمانه‌ای A هستند. با انتخابِ ترکیب خطیِ $F^a \pm \bar{F}^a = ۰$ می‌بینیم که این معادلات منجر می‌شوند به

$$F^a + \bar{F}^a = ۰ \;\Leftrightarrow\; R^{ab} + \frac{۱}{\ell^۲} e^a \wedge e^b = ۰ \tag{۳-۱-۱۱}$$

و

$$F^a - \bar{F}^a = ۰ \;\Leftrightarrow\; T^a = de^a + \omega^a_{\ b} \wedge e^b = ۰ \tag{۳-۱-۱۲}$$

که به‌ترتیب معادله‌ی دوم کارتان و معادله‌ی بدونِ پیچش بودن هموستار اسپینی هستند؛ این دو معادله همتای معادلات اینشتین و معادله‌ی بدون پیچش بودنِ هموستار لوی‌چویتا در فرمول‌بندی آشنای گرانش اینشتینی هستند. پس این دو نظریه در سطح معادلات حرکت هم‌خوانی دارند.

۳-۱-۲ ترجمه‌ی شرایطِ مرزی مجانبا پاددوسیته روی میدان‌های پیمانه‌ای

این مباحث را بعدا به‌شکلِ کامل‌تری در بخش ۳-۳ می‌بینیم، اما شرایطِ مرزی برای ما بسیار مهم‌اند، چرا که تنها مولفه‌ی دینامیکی در نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی هستند و نقش محوری این شرایطِ مرزی را در رسیدن به نظریه میدانِ لیوویل روی مرز همدیس خواهیم دید. پس صرفا شرطِ مرزی را نقل می‌کنیم و نگاهِ دقیق‌تر به آن را به بخشِ ۳-۳ موکول می‌کنیم. قسمتِ مهم این بخش تبدیلِ این شرایط مرزی به شرطِ مرزی روی میدان‌های پیمانه‌ای است.

در پیمانه‌ی ففرمن_گرام، متریکِ فضازمانِ سه‌بعدی به شکلِ زیر نشان داده می‌شود.

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2}dr^2 + \gamma_{ij}(r, x^k)dx^i dx^j \tag{۳-۱-۱۳}$$

که در حد $r \to \infty$ بسطِ $\gamma_{ij} = r^2 g^{(0)}_{ij}(x^k) + \mathcal{O}(1)$ را دارد. می‌گوییم متریکِ فضازمان به‌معنای Brown-Henneaux، مجانبا پاددوسیته است اگر که در حد $r \to \infty$ به شکل زیر باشد.

$$g^{(0)}_{ij}dx^i dx^j = -dx^+ dx \tag{۳-۱-۱۴}$$

هم‌چنین، نشان‌داده‌شده که کلی‌ترین جوابِ نظریه‌گرانش اینشتین با این شرایطِ مرزی Brown-Henneaux، به شکل زیر است [۴۵] .

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{r^2}dr^2 - \left(rdx^+ - \frac{\ell^2}{r}L(x^-)dx^-\right)\left(rdx^- - \frac{\ell^2}{r}\bar{L}(x^+)dx^+\right) \tag{۳-۱-۱۵}$$

که $L(x^-)$ و $\bar{L}(x^+)$ دو تابع تک‌مقداری دلخواه هستند.

حالا شرایطِ بالا را به نظریه‌ی توپولوژیک Chern-Simons ترجمه می‌کنیم. میدانِ چارچوبِ e^a که ریشه‌ی متریکِ (۳-۱-۱۵) است، یعنی $ds^2 = \eta_{ab}e^a e^b$ ، درنظرمی‌گیریم [۵] . می‌توانیم ببینیم که انتخابِ مولفه‌های زیر برای e^a مناسب است.

$$\begin{aligned} e^0 &= -\frac{r}{\sqrt{2}}dx^- + \frac{\ell^2}{\sqrt{2}r}\bar{L}(x^+)dx^+ \\ e^1 &= \frac{r}{\sqrt{2}}dx^+ - \frac{\ell^2}{\sqrt{2}r}L(x^-)dx^- \\ e^2 &= \frac{\ell}{r}dr \end{aligned} \tag{۳-۱-۱۶}$$

حالا از شرطِ اول کارتان استفاده می‌کنیم تا هموستارهای اسپینی را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \frac{r}{\sqrt{2}\ell}dx^- + \frac{\ell}{\sqrt{2}r}\bar{L}(x^+)dx^+ \\ \omega^1 &= \frac{r}{\sqrt{2}\ell}dx^+ + \frac{\ell}{\sqrt{2}r}L(x^-)dx^- \\ \omega^2 &= 0 \end{aligned} \tag{۳-۱-۱۷}$$

[۵] در این‌جا متریکِ η غیرقطری است.

میدانِ پیمانه‌ی دست‌سانی که از ترکیب این میدانِ چارچوب و هموستار اسپینی، یعنی با کمک رابطه‌ی $A = (\omega^a + e^a/\ell)j_a$ و $\bar{A} = (\omega^a - e^a/\ell)j_a$ حاصل می‌شود، به شکل زیر است.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dr}{۲r} & \frac{\ell}{r}\bar{L}(x^+)dx^+ \\ \frac{r}{\ell}dx^+ & -\frac{dr}{۲r} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -\frac{dr}{۲r} & \frac{r}{\ell}dx^- \\ \frac{\ell}{r}L(x^-)dx^- & \frac{dr}{۲r} \end{pmatrix}. \qquad (۱۸-۱-۳)$$

اگر اندکی با نظریه‌ی میدان‌های پیمانه‌ای آشنا باشیم، می‌دانیم که می‌توان وابستگی به r را در میدانِ پیمانه‌ای بدست آمده در بالا حذف کرد. کافی است که با انتخابِ

$$b(r) = \begin{pmatrix} r^{-۱/۲} & ۰ \\ ۰ & r^{۱/۲} \end{pmatrix}. \qquad (۱۹-۱-۳)$$

تبدیل پیمانه‌ای به شکل زیر اعمال کنیم.

$$a = b^{-۱}A\,b + b^{-۱}db, \quad \bar{a} = b\,\bar{A}\,b^{-۱} + b\,db^{-۱} \qquad (۲۰-۱-۳)$$

میدانِ پیمانه‌ای جدید، به شکل زیر بدست می‌آید.

$$a = \begin{pmatrix} ۰ & \ell\,\bar{L}(x^+)dx^+ \\ dx^+/\ell & ۰ \end{pmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} ۰ & dx^-/\ell \\ \ell\,L(x^-)dx^- & ۰ \end{pmatrix}. \qquad (۲۱-۱-۳)$$

حالا به کمکِ تعریفِ $a = a^a_\mu j_a dx^\mu$ ، آن را به مولفه‌هایش می‌شکانیم [۶] . می‌بینیم که $a_r = ۰ = \bar{a}_r$ و دو دسته شرایطِ مرزی زیر را داریم.

$$\begin{aligned} &(۱)\quad a_- = ۰ = \bar{a}_+, \\ &(۲)\quad a_+ = \frac{\sqrt{۲}}{\ell}j_۱ + ۰\,j_۲ + \sqrt{۲}\ell L(x^+)j_۰, \\ &(۲')\quad \bar{a}_- = \sqrt{۲}\ell\bar{L}(x^-)j_۱ + ۰\,j_۲ + \frac{\sqrt{۲}}{\ell}j_۰ \end{aligned} \qquad (۲۲-۱-۳)$$

خواهیم دید که شرطِ اول، کنش Chern-Simons را به جمعِ دو کنش دستیده‌ی WZW تبدیل می‌کند. هم‌چنین شرایطِ دسته‌ی دوم جریان‌هایِ مدلِ WZW را قید می‌کنند و ما را به نظریه‌ی میدان لیوویل می‌رسانند.

[۶] برای تعریف مولدها و همچنین متریکِ غیرقطری به پانویسِ (۳-۱-۴۲) نگاه کنید.

۳-۱-۳ بهبودِ کنشِ Chern-Simons

همانطور که در بخشِ پیشین دیدیم، کنش یک نظریه گرانشی در فضای مجانبا پاددوسیته به شکل زیر است:

$$S_E[A,\bar{A}] = S_{CS}[A] - S_{CS}[\bar{A}] \tag{۳-۱-۲۳}$$

که در آن:

$$S_{CS}[A] = -\frac{k}{۴\pi}\int_{\mathcal{M}} Tr\Big[A\wedge dA + \frac{۲}{۳}A\wedge A\wedge A\Big] \tag{۳-۱-۲۴}$$

در این کنش، میدان های پیمانه ای A عضوی از گروه $SL(۲,\mathbb{R})$ هستند.

همچنین از این به بعد با ثابت κ به جای k کار می کنیم که به شکل زیر معرفی می شود:

$$\kappa \equiv \frac{k}{۴\pi} = \frac{\ell}{۱۶\pi G}$$

اما پیش از ادامه برای رسیدن به کنش WZW ، باید مشکلی جزئی را حل کنیم، کنش (۳-۱-۲۳) به معادله حرکت درستی منجر نمی شود، برای همین لازم است که کنش را اصلاح کنیم.

ابتدا بیایید ریشه مشکل را ببینم [۷] ؛ اول کنش (۳-۱-۲۳) را در مختصاتِ استوانه‌ای (τ,r,φ) می نویسیم:

$$S_{CS}[A] = -\kappa\int_{\mathcal{M}} dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho Tr\Big[A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{۱}{۳}A_\mu[A_\nu,A_\rho]\Big] \tag{۳-۱-۲۵}$$

که در آن از رابطه ی $[A,A] = ۲A\wedge A$ بهره برده ایم [۸] .

با کمک تعریف فرم دیفرانسیل حجم و تانسور لوی چویتا می توانیم این رابطه را باز کنیم و به صورتِ زیر برسیم:

$$\begin{aligned} S_{CS}[A] = -\kappa\int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr\Big[&A_r(\partial_\tau A_\varphi - \partial_\varphi A_\tau) + A_\tau(\partial_\varphi A_r - \partial_r A_\varphi) \\ &+ A_\varphi(\partial_r A_\tau - \partial_\tau A_r) + ۲A_\tau[A_\varphi,A_r]\Big] \end{aligned} \tag{۳-۱-۲۶}$$

---

[۷] کافی است که فقط یکی از قسمت های دستیده ی کنش را بررسی کنیم و قسمت دیگر مشابها انجام می شود.

[۸] توجه کنید که این رابطه به‌ظاهر اشتباه است، چون که جابه‌جا گر هرچیزی با خودش بایستی صفر شود؛ اما توجه کنید که میدان های A یک‌ـ‌فرم با مقدار در جبرِ لی هستند، بنابراین برای محاسبه کردن جابه‌جاگر باید دقت بیشتری به خرج بدهیم.

$$[A,A] = [A_\mu,A_\nu]dx^\mu\wedge dx^\nu = A_\mu A_\nu dx^\mu\wedge dx^\nu - A_\nu A_\mu dx^\mu\wedge dx^\nu$$

جمله اولی همان $A\wedge A$ است اما جمله دومی چون ماتریس های A_μ و A_ν با هم جابه جا نمی شوند، نیاز به تغییر اندیس هست، پس از انجام این کار، از اتحاد $dx^\mu\wedge dx^\nu = -dx^\nu\wedge dx^\mu$ استفاده می کنیم و می بینیم که رابطه فوق درست است.
.

حال از جمله ی دوم و پنجم انتگرال جزء‌به‌جزء می گیریم، توجه کنید که فقط انتگرال های مرزی r را نگه می داریم چون متغیر φ تناوبی است و انتگرالش روی یک دوره تناوب صفر می شود؛ همچنین برای جمله های مشتق کامل از رابطه استوکس استفاده می کنیم تا به رابطه زیر برسیم:

(۳-۱-۲۷)
$$S_{CS}[A] = -\kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr \Big[A_r \dot{A}_\varphi - A_\varphi \dot{A}_r + ۲ A_\tau (\partial_\varphi A_r - \partial_r A_\varphi + [A_\varphi, A_r]) + \kappa \int_{\partial \mathcal{M}} d\tau d\varphi Tr [A_\tau A_\phi] \Big]$$

که علامت $\dot{\Box}$ به معنای مشتق گیری ∂_τ است.

اما آخرین جمله در معادله فوق ثابتی است که در تعریف کنش می توانیم جذب کنیم و آنچه که باقی می ماند این است:

$$S_{CS}[A] = -\kappa \int_{\mathcal{M}} dr d\tau d\varphi Tr \Big[A_r \dot{A}_\varphi - A_\varphi \dot{A}_r + ۲ A_\tau F_{\varphi r} \Big] \qquad (۳\text{-}۱\text{-}۲۸)$$

که F ، دو-فرم انحنای مربوط به میدان A است یعنی $F = dA + A \wedge A$.

حالا می توانیم مشکل را واضحا ببینیم؛ اگر وردش کنش فوق را محاسبه کنیم، خواهیم دید که

$$\delta S_E = (EOM) + ۲\kappa \int_{\partial \mathcal{M}} d\tau d\varphi \;\; Tr \Big[A_r \delta A_\varphi - \bar{A}_r \delta \bar{A}_\varphi \Big]$$

اما این عبارت، رویِ غشایِ جرم صفر نیست؛ پس معادلات حرکت صادق نیستند و باید کنش را بهبود دهیم.

با الهام از شرایط مرزی (۳-۱-۲۲) روی میدان‌های پیمانه‌ای، می توانیم کنش را به سادگی اصلاح کنیم، می دانیم که روی مرز، $A_- = ۰ = \bar{A}_+$ که اندیس های $\pm$ در مختصات مخروط نوری هستند [۹] .

با افزودن جمله‌ی جدیدِ $I = -\kappa \int_{\partial \mathcal{M}} d\tau d\varphi \;\; Tr \Big[A_\varphi^۲ + \bar{A}_\varphi^۲ \Big]$ به کنش $S_E[A, \bar{A}]$ خواهیم دید که وردش کنش رویِ غشایِ جرمی هم صفر خواهد بود و شرایط مرزی جمله ی اضافی را که در بالا دیدیم، حذف می کنند.

---

[۹] همانطور که دیدیم:

$$A_- = A_\tau - A_\varphi$$
$$\bar{A}_+ = \bar{A}_\tau + \bar{A}_\varphi$$

فصل ۴

توابع پارش گرانش سه‌بعدی مجانبا پاددوسیته

در این قسمت، به طور کاملا منظم و ساختاریافته، به مطالعه‌ی تابع پارش گرانش سه‌بعدی با شرایطِ مرزی Brown-Henneauxمی‌پردازیم. همانطور که می‌دانیم، کنش کلاسیکیِ اقلیدسی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$I = \frac{۱}{۱۶\pi G}\int d^{۳}x\sqrt{g}\left(R+\frac{۲}{\ell^{۲}}\right) \tag{۴-۰-۱}$$

آنچه که در این بخش موردعلاقه‌مان است، مطالعه‌ی دقیقِ ترازهای انرژی نظریه‌ی گرانشیِ در فضازمان مجانبا پاد دوسیته است؛ یعنی فرمِ متریک در دوردست‌های قید می‌شود و مسئله‌ی گرانش کوانتومی با کمک رهیافتِ انتگرال مسیر، با جمع وزن‌دار (وزنِ کنش اقلیدسی) روی تمامیِ فضازمان (جواب‌های معادله‌ی اینشتین) که فرمِ مجانبی مذکور را دارند، بررسی می‌شود. می‌بینیم که متاسفانه، نتیجه‌ای که از نتیجه‌ای که از این محاسبات می‌گیریم، خیلی از نظرِ فیزیکی خوشایند نیست؛ همچنین سناریوهای احتمالی برای گرفتنِ این جوابهای غیرقابلِ‌قبولِ فیزیکی را هم ذکر می‌کنیم.

از دیدگاه تمام‌نگاری، دوست‌داریم که بتوانیم نتیجه‌ی تابع پارش را به فرمِ $\mathrm{Tr}\exp\left(-\beta H\right)$ بنویسیم و نظریه‌ی گرانشیِ سه‌بعدیِ مجانبا پاددوسیته‌ی خالی را معادل با یک سامانه‌ی کوانتومی بدانیم که هامیلتونی آن H است و β عددی مختلط با قسمت حقیقی مثبت است که نمایانگر معکوس دما در ترمودینامیک کوانتومی است. در اولین برخورد با مسئله، خیلی طبیعی است که هامیلتونی، همان انرژی ADM باشد که از طریقِ رفتار مجانبیِ متریک بدست می‌آید. این روش، دقیقا رهیافتِ Brown و Henneaux در [۱] بود که منجر به پیدا شدن تقارن‌های مجانبی گرانش کوانتومی سه‌بعدی شد. البته توجه می‌کنیم که

تنها درجات آزادی سرتاسری سامانه، انرژی (یا جرم آن) نیست، بلکه ممکن است تکانه (زاویه‌ای) برای توصیف فضازمان لازم باشد، در این صورت باید تابع پارش را به شکل $\mathrm{Tr}\exp\big(-\beta H - iJ\theta\big)$ برای سامانه کوانتومی دوگان بنویسیم.

تابع پارش، با جمع روی هندسه‌های اقلیدسی سه‌بعدی که جوابِ فضازمان هستند، محاسبه می‌شوند. ما انتگرالِ مسیرِ نیمه‌کلاسیک را روی هندسه‌هایی که در مرزِ همدیس‌شان یک چنبره هستند و پارامتر ماژولی $\tau = \frac{\theta}{۲\pi} + i\beta$ دارند، محاسبه می‌کنیم [1].

در مختصاتِ پوانکاره، متریک به شکلِ

$$ds^۲ = \frac{du^۲ + |dz|^۲}{u^۲}$$

است و مرزِ همدیس در حدِ $u \to ۰$ حاصل می‌شود.

مطابق دوگانی پیمانه/گرانش، تابع پارش محاسبه‌شده در بالا، تابع پارشِ نظریه‌ی دوگان روی مرزِ همدیس، تابع پارش روی یک نظریه‌ی میدان همدیس است که روی چنبره تعریف شده است. در حقیقت، می‌بینیم که هامیلتونی و تکانه‌ی نظیر نظریه‌ی دوگان، با هامیلتونی و تکانه‌ی زاویه‌ای فضازمان گرانشی معادل می‌شود.

از دیدگاه انتگرال مسیرِ گرانشی، تابع پارش با دستور زیر حاصل می‌شود.

$$Z = \int [D\phi][Dg_{\mu\nu}] e^{-I[g_{\mu\nu},\phi]} \qquad (۴-۰-۲)$$

اما متاسفانه، این انتگرال همگرا نیست. تنها راه شناخته شده برای دست‌وپنجه نرم کردن با این مشکل این است که پیرامون یک جواب کلاسیک بسط بدهیم(یعنی از تقریبِ زینی استفاده کنیم.) هیچ جواب دقیقی به این سوال هم در دسترس نیست که توپولوژی‌هایی که جواب کلاسیک ندارند، آیا سهم معناداری به انتگرالِ مسیر می‌دهند یا نه. همچنین اثراتِ غیراختلالی به انتگرال مسیر گرانشی هم در هاله‌ای از ابهام است. متاسفانه، فعلا، راهی هم برای بررسی کردن این سوالات در دسترس نیست.

[1] ممکن است که سوال پرسیده شود چرا تمرکزمان روی هندسه‌های با مرز چنبره است و چرا حالت ساده‌ی مرز کروی را اول بررسی نمی‌کنیم؟ می‌دانیم مرزِ همدیسِ چنبره که یک پارامترِ ماژولی دارد، و در جاهای مختلفِ فیزیک دیده‌ایم که این پارامتر ماژولی در ارتباط با خواص گرمایی فضازمان است. به‌خصوص ما علاقه‌مندیم که از نتایجِ این بخش در ترمودینامیک سیاهچاله‌های سه‌بعدی استفاده کنیم. اگر سراغ سهم‌هایی برویم که مرزِ همدیسِ کروی دارند، مطابق دوگانی پیمانه/گرانش، این معادلِ هندسه‌هایی است که فضای سرتاسری پاددوسیته را هستند و سیاهچاله‌ها را در برنمی‌گیرد. البته این هرگز به این معنی نیست که مرزهای کروی برای ما فیزیک جدید ندارند، اتفاقا در مورد پایداری خلا فضای گرانشی نتایجی دربردارند؛ اما اگر قرار باشد خواص گرمایی فضازمان را نگاه کنیم، اولین سهم‌های مهم همین سهم‌های چنبره‌ای هستند. اگر بازهم علاقه‌مند باشیم که کاوش‌مان را عمیق‌تر کنیم، مرزهای همدیسی که رویه‌های ریمانی با $g > ۱$ هستند هم جالب توجه‌اند؛ اما متاسفانه بررسی ریاضیِ این خمینه‌ها دشوارتر است.

اما خوشبختانه، ساختار گرانش سه‌بعدی طوری است که به ما امکان دسته‌بندی جواب‌ها را می‌دهد. [۶۷، ۶۸] این دسته‌بندی جوابها به لطفِ عدمِ وجودِ درجات ازادی موضعی در توده‌ی خمینه است که باعث می‌شود معادله‌ی اینشتین به‌طور خودکار در توده برقرار بشود. جالب‌تر از همه این‌که خواهیم دید بسطِ اختلالیِ انتگرالِ مسیر گرانشی حول جوابهای کلاسیک در مرتبه‌ی تک‌حلقه خاتمه می‌یابد و به این معنی، گرانش سه‌بعدی در مرتبه‌ی تک‌حلقه دقیق است.

در این بخش، مباحثِ زیر را به ترتیب پی می‌گیریم. اول سهم‌های شناخته شده به انتگرالِ مسیر گرانشی را دسته‌بندی می‌کنیم و سهم‌های معنادار فیزیکی را از سهم‌های کم‌اهمیت جدا می‌کنیم. در بخش‌بعدی، جمعِ تابع پارش را با کمک‌سری‌های پوانکاره و روشِ بازجمعِ پواسون و منتظم‌سازی انجام می‌دهیم. دقیقا در همین مرحله است که جوابهای غیرفیزیکی می‌بینیم و سپس سعی می‌کنیم سناریوهای احتمالی برای غیر فیزیکی شدن پاسخمان را نگاه کنیم. نتایجِ کارهای ما تصحیحات به آنتروپی سیاهچاله‌ی BTZ را بدست می‌دهند و در آخر هم تمامیِ کارهای بالا را برای نظریه‌های ابرمتقارن نگاه می‌کنیم؛ نتایج کم‌وبیش یکسان است و می‌توانیم بگوییم که قسمت عمده‌ی فیزیک مسئله را در مسئله‌ی بوزونی دیده‌ایم.

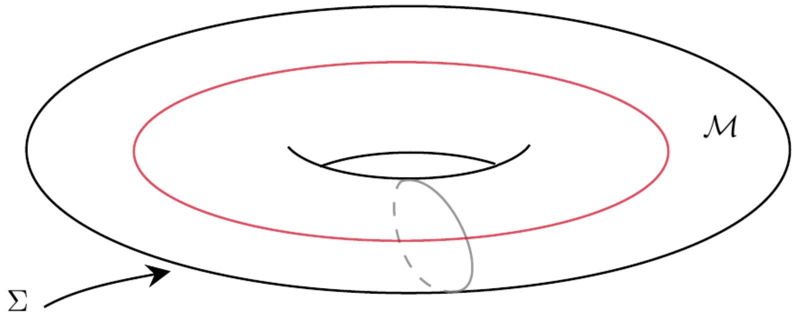
۴-۱ جواب‌های کلاسیکی سهیم در انتگرالِ مسیر گرانشی

در این قسمت، جواب‌های کلاسیکی در نظریه‌ی گرانش سه‌بعدی را نگاه می‌کنیم و انتخاب‌های مختلف برای خمینه‌های فضازمانی معتبرِ $\mathcal{M}$ را بررسی می‌کنیم، هم‌چنین سهم یک جواب نوعی را به تابع پارش نگاه می‌کنیم و استدلالاتی کلی از منظر تمام‌نگاری خواهیم داشت.

۴-۱-۱ دسته‌بندی جواب‌های کلاسیک

اولین قدم در بدست آوردن جواب‌های کلاسیک، قید کردن شرایطِ مرزیِ خمینه است و همانطور که در بخش قبلی گفتیم، خمینه‌های مورد بررسی ما در حد $u \to 0$ (یعنی مرز همدیس)، به شکل یک چنبره (یا رویه‌ای ریمانی با $g = 1$) هستند و متریک رویِ این چنبره، متریکِ تختِ $ds^2 = |dz|^2$ در مختصاتِ مختلط است. این مرزِ همدیس را با Σ نشان می‌دهیم. هم‌چنین، فرضهای استاندارد نسبیت عام را روی این فضازمان سه‌بعدی می‌گذاریم. یعنی خمینه‌ی $\mathcal{M}$ هموار است و متریک روی این خمینه کامل است.

هم‌چنین Σ تنها مرزِ این خمینه است($\partial\mathcal{M} = \Sigma$). البته شاید مجبور باشیم جایی از این شرایط کوتاه بیاییم و تعدیلشان کنیم، اما برای شروع نقطه‌ی خوبی هستند. (به شکل ۴-۱)



شکل ۴-۱: چنبره‌ای که توصیف‌کننده‌ی مرز همدیس فضازمان است. خمینه‌ی $\mathcal{M}$ فضای داخلی این چنبره به همراه مرزش است.

گروه‌های خودریختی فضای $AdS_۳$ ، همان گروه لورنتز است.

$$\mathrm{SO}(۱,۳) \cong \frac{\mathrm{SL}(۲,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_۲}$$

و متریک آن در مختصات پوانکاره به شکل

$$ds^۲ = \frac{du^۲ + |dz|^۲}{u^۲}$$

است [۲] .

می‌دانیم که جواب‌های فضازمانی معادله‌ی اینشتین، موضعا به شکل $\mathrm{AdS}_۳$ هستند؛ این به این معناست که اگرچه در خواص سرتاسری ممکن است کاملا متفاوت باشند، اما موضعا شبیه با فضای مدلِ $\mathrm{AdS}_۳$ هستند. برای ساخت خمینه‌هایی به شکل بالا، یک روش کلی و منظم وجود دارد که در اینجا توصیفش می‌کنیم. اول با انتخاب یک زیرگروه گسسته (یا متناهی تولیدشده) از گروه خودریختی‌های فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی شروع می‌کنیم و با خارج‌قسمتی کردن فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی با این زیرگروه انتخابی، به فضایی می‌رسیم که همچنان در معادله‌ی اینشتین صادق است (البته به جز احتمالا در تعداد معدودی نقطه.) بیایید این پروسه را در عمل ببینیم.

مختصه‌های (z,u) را برای نیم‌فضای بالایی $\mathbb{H}^۳$ انتخاب می‌کنیم و با یک عدد کواترنیونی به شکل $y = z + ju$ نقاط آن را نشان می‌دهیم. حالا اثر گروهِ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(۲,\mathbb{C})$ روی این فضا را به شکل

[۲] در این متریک، شعاع فضای پاددوسیته را واحد گرفته‌ایم.

زیر تعریف می‌کنیم.

$$z \to (ay+b)(cy+d)^{-1} \tag{۴-۱-۱}$$

توجه‌کنید که دو عضوِ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ به یک شکل روی نقاطِ فضا اثر می‌کنند؛ پس اثرِ بالا در حقیقت اثر گروه $\frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$ یا گروه لورنتز روی نیم‌فضای بالایی است. مطابقِ حرفهایی که در بالا گفته شد، جوابهای گرانش سه‌بعدی، به فرم $\frac{AdS_3'}{\Gamma}$ هستند که Γ زیرگروهی گسسته (یا متناهی تولیدشده) از $\mathrm{SO}(1,3)$ است و AdS_3' تنها یک زیرمجموعه‌ی باز از فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی است که گروهِ تقارنی Γ روی آن اثر می‌کند.

حالا بیایید ببینیم که در این ساختار، مرزِ همدیسِ خمینه‌ی $\mathcal{M}$ که محل زندگی نظریه‌میدان‌همدیس دوبعدی است، چطور ساخته می‌شود. می‌دانیم مرز همدیس فضای پاددوسیته‌ی سه‌بعدی یک کره‌ی دوبعدی است که می‌توانیم آن را به چشم فضای تصویری $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ به آن نگاه کنیم. این فضای تصویری با پارامتر مختلط z مختصه‌بندی شده است. از شیوه‌ی اثر گروه لورنتز روی نیم‌فضای بالایی در معادله‌ی (۴-۱-۱) می‌توانیم ببینیم که اثر زیر روی کره‌ی ریمان (یا $\mathbb{C}P^1$) القا خواهد شد.

$$z \to (az+b)(cz+d)^{-1} \tag{۴-۱-۲}$$

اینجا اما کمی دقتِ ساختاریِ ریاضی لازم است که ما آن را در حد اشاره ذکر می‌کنیم. خارج قسمتی کردن کلِ کره‌ی ریمان با این گروه، یک خمینه‌ی خوش‌تعریف روی مرز نمی‌دهد، بلکه باید نقاط ثابت اثر را برداریم و اثر را تنها روی ناحیه‌ای تعریف کنیم که به شکل ناپیوسته است. این ناحیه‌ی جدید را با $U \subset \mathbb{C}P^1$ نشان می‌دهید و آن را ناحیه‌ی ناپیوستگی می‌نامیم. با درنظر گرفتن این اصلاح جزئي، مرز همدیس خمینه‌ی $\mathcal{M}$ ، از خارج‌قسمتی کردن U با گروه Γ حاصل می‌شود.

$$\partial\mathcal{M} = \Sigma = \frac{U}{\Gamma} \tag{۴-۱-۳}$$

در اینجا، نکته این است که چون اثر گروه به‌گونه‌ای است که مولفه‌های z و $\bar{z}$ را مخلوط نمی‌کند، پس مرز همدیس هم ساختارِ مختلط کره‌ی ریمان را به ارث می‌برد.

اما یادمان هست که انگیزه‌ی ما مطالعه‌ی خمینه‌هایی بود که مرز همدیس‌شان یک چنبره بود، پس باید گروه‌های گسسته‌ی Γ را به درستی انتخاب کنیم. اگر قرار باشد که Σ چنبره باشد، پس گروه بنیادی آن

$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} = \pi_1(\Sigma)$ است. نتیجه‌ی رابطه‌ی (۴-۱-۳) در سطح گروه‌بنیادی این است که $\pi_1(U) \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و این سه امکان را مطرح می‌کند.

۱. حالتی که اندیسِ گروهِ $\pi_1(U)$ در $\pi_1(\Sigma)$ متناهی باشد.

۲. $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$

۳. حالت آخر هم این است که گروه $\pi_1(U)$ ممکن است بدیهی باشد.

در ادامه از خواص و قضایایی در نظریه‌ی رویه‌های ریمانی استفاده می‌کنیم تا این سه‌حالت را نگاه کنیم و بفهمیم که کدامشان به ما خمینه‌ای با مرزِ همدیس چنبره می‌دهند.

حالت اول ممکن نیست. چون در این صورت، خودِ U یک پوشش با اندیس متناهی از Σ است. به‌خاطر متناهی بودن اندیس گروهِ $\pi_1(U)$ در $\pi_1(\Sigma)$، گروهِ بنیادی آن حتما یک مولفه‌ی $\mathbb{Z}$ دارد. اما از طبقه‌بندی فضاهای تخت می‌دانیم که فقط درصورتی این امکان پذیر است که خود U یک رویه‌ی ریمانی با $g = 1$ یا چنبره باشد. اما یادمان هست که $U \subset \mathbb{C}P^1$ و هیچ زیرمجموعه‌ای از کره‌ی ریمان یک چنبره نیست! پس حالت اول کلا امکان ندارد.

سراغ حالتِ سوم برویم، وقتی گروه بنیادی فضای پوششی بدیهی می‌شود؛ مطابق تعریف، فضای پوششی یک فضای پوششی عام است و فضای پوششی عام یک چنبره، صفحه‌ی مختلط یا $\mathbb{R}^2$ است. برای این‌که $U \cong \mathbb{C}$ را در $\mathbb{C}P^1$ بنشانیم، یک راه بیشتر نداریم؛ باید صفحه‌ی مختلط را در خودش بنشانیم و نقطه‌ی بی‌نهایت را نقطه‌ی ثابت اثر بگیریم. (تمامی انتخاب‌های دیگر، به هرشکلی که باشند، بالاخره باید یک نقطه را به‌عنوان نقطه‌ی ثابت داشته باشند.) اگر تقاضا کنیم که نقطه‌ی $z = \infty$ نقطه‌ی ثابت اثر باشد، زیرگروهی از $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ که این نقطه را ثابت نگه‌می‌دارد، از ماتریس‌های بالامثلثی تشکیل شده است.

$$\begin{pmatrix} \lambda & w \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \tag{۴-۱-۴}$$

به شکل $z \longrightarrow \lambda^2 z + \lambda w$ روی مرزِ همدیس اثر می‌کند.

حالا مطابق قضیه‌ی یکنواخت‌سازی سطوح ریمانی چون که U همبندساده است، پس $\pi_1(U)$ با تبدیلاتِ deck این اثر یکسان است و این یعنی $\Gamma = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. بنابراین باید بتوانیم گروهِ $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ از

ماتریس‌های بالامثلثی بیرون بکشیم. دو ماتریسِ $\begin{pmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ که $a, b \in \mathbb{C}$ اعدادی هستند که روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند، انتخاب خوبی برای مولدها هستند. بنابراین گروهِ Γ با دو عدد مختلط ساخته می‌شود؛ اما این همه‌ی ماجرا نیست.

با تزویجی کردن اعضای این گروه با اعضایِ دیگر از $\mathrm{SL}(۲, \mathbb{C})$ به گروه دیگری می‌رسیم که با این گروه همریخت است، اما پارامترهای a, b آن متفاوت‌اند. چیزی که درحقیقت مهم است، نسبت b/a است. اگر بگیریم $a = ۱$ و $b = \tau$، گروهِ مدنظر ما با دوماتریسِ $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & \tau \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ تولید می‌شود. به‌عنوان نکته‌ی پایانی، تبدیلِ $\tau \to -\tau$ هم تاثیری روی زیرگروه تولید شده ندارد، پس باید خودمان را به $\mathrm{Im}\tau > ۰$ محدود کنیم.

با تمامی این حرفهای بالا، گروه Γ به شکل $z \to z + m + n\tau$ که $m, n \in \mathbb{Z}$ است، معرفی می‌شود. این گروه درحقیقت معرف یک شبکه روی صفحه‌ی مختلط است و کاری که الان انجام دادیم، ساختن فضای تایشمولر چنبره بود.

اما مشکلی وجود دارد! خمینه‌ی خارج‌قسمتی حاصل که به شکل $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ است، خواصی که در اول این بخش ذکر کردیم ندارد. تنها مرزِ خمینه قرار بود چنبره در حد $u \to ۰$ باشد. اما متاسفانه در $u = \infty$ هم مرزی داریم، در این مرز متریک صفر می‌شود. این مرز دقیقا مانند یک نقطه‌ی بریده شده است و در شکل ۴-۲ دیده می‌شود.

پس این خمینه واجد شرایطی که انتظار داشتیم نیست.

البته هنوز هم مطمئن نیستیم که دور ریختن این فضازمان‌ها کار درستی باشد، اما شواهدی فیزیکی پیشینی ما، شرایط جوابِ معادله‌ی اینشتین، مانع حضورشان می‌شود. یک دلیل فیزیکی تر این است که حلقه‌هایی که حولِ این نقاط زده شده است، می‌توانند طول بسیار بسیار کوچکی بگیرند و مرتبه‌های زیرپلانکی بروند. این حلقه‌ها تقریبِ نیمه کلاسیک را خراب می‌کنند. (به شکل ۴-۳ نگاه کنید.)

۴-۱-۲ ساختِ هندسه‌های هموارِ نیمه‌کلاسیک

اگر $\pi_۱(U) = \mathbb{Z}$ باشد، ناحیه‌ی باز U نمی‌تواند به جز $\mathbb{R} \times S^۱$ باشد. برای ساختن چنین هندسه‌هایی، باید سراغ زیرگروه‌هایی از گروه لورنتز برویم که شامل ماتریس‌های قطری است (تا نقطه‌ی $z = ۰$ را

پیوست ث

مقدمه ای کوتاه بر نظریه‌های Chern-Simons و WZW

ث‌ـ۱ نظریه‌ی Chern-Simons

در این‌قسمت، تنها نظریه‌ی توپولوژیکِ Chern-Simons را توصیف می‌کنیم و به ویژگی‌هایی که برای اهداف ما در بخش ۳ موردنیاز است، اشاره می‌کنیم.

کنش *Chern-Simons* برای یک گروه فشرده‌ی G به شکل زیر داده می‌شود.

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \text{Tr}\Big(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\Big) \tag{ث‌ـ۱-۱}$$

که k ثابتِ مرحله نامیده می‌شود. A نمایانگرِ ۱ـ‌فرم با مقدار در جبرِ لیِ $\mathfrak{g}$ است، یعنی $A = A_\mu dx^\mu$. همچنین Tr نشانگرِ فرم دوخطیِ ناتبهگن رویِ جبرِ لیِ $\mathfrak{g}$ است [۱].

با نوشتن $A = A^a T_a$ ، که T_a مولدهای جبرِ لی $\mathfrak{g}$ هستند، جمله‌ی اول کنشِ (ث‌ـ۱-۱) ، مشاهده می‌کنیم که

$$\text{Tr}[A\wedge dA] = \text{Tr}(T_aT_b)[A^a\wedge dA^b]$$

[۱] این شرط به این‌خاطر است که تمامی میدان‌های پیمانه‌ای ظاهرشده در کنش، باید جمله‌ی جنبشی داشته باشند. تمامی جبرهایِ لیِ نیمه‌ساده واجد چنین فرمِ دوخطی ناتبهگنی هستند.

این یعنی $d_{ab} \equiv \mathrm{Tr}(T_a T_b)$ نقشِ متریک در جبرِ لیِ $\mathfrak{g}$ را بازی می‌کند و به همین خاطر باید ناتبهگن باشد.

با وردش دادن کنشِ بالا و هم‌چنین انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، حاصل می‌شود که

$$\delta S_{\mathrm{CS}}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\Big(2\delta A \wedge (dA + A\wedge A)\Big) - \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{Tr}\Big(A\wedge\delta A\Big) \qquad \text{(ث\_۱-۲)}$$

اگر δA طوری انتخاب شود که روی مرز خمینه‌ی ، یعنی $\partial\mathcal{M}$، صفر شود، [۲] معادله‌ی حرکت را به‌دست می‌آوریم.

$$F \equiv dA + A\wedge A = 0 \qquad \text{(ث\_۱-۳)}$$

که F یک ۲_فرم با مقدار در جبرِ لیِ $\mathfrak{g}$ است و انحنای میدان‌های پیمانه‌ای A را می‌سنجد.

این معادله، به شکل موضعی نتیجه می‌هد که

$$A = G^{-1}dG \qquad \text{(ث\_۱-۴)}$$

این یعنی که میدانِ A، تبدیلی پیمانه‌ای از پیکربندیِ بدیهیِ $A = 0$ است؛ به بیانی دیگر، A پیمانه‌ی خالص است [۳] .

این مشاهده به ما می‌فهماند که نظریه‌ی Chern-Simons درجه‌ی آزادی انتشارشونده ندارد و درحقیقت یک نظریه‌ی میدان توپولوژیک است. به همین دلیل هم است که می‌تواند با یک نظریه‌ی گرانشی که درجه‌ی آزادی انتشارشونده ندارد، معادل شود.

ث_۲ نظریه‌ی WZW

با مدلِ سیگمای غیرخطی شروع می‌کنیم و با افزودن جمله‌ی Wess-Zumino ناهنجاریِ همدیس این مدل را برطرف می‌کنیم تا به مدل WZW برسیم.

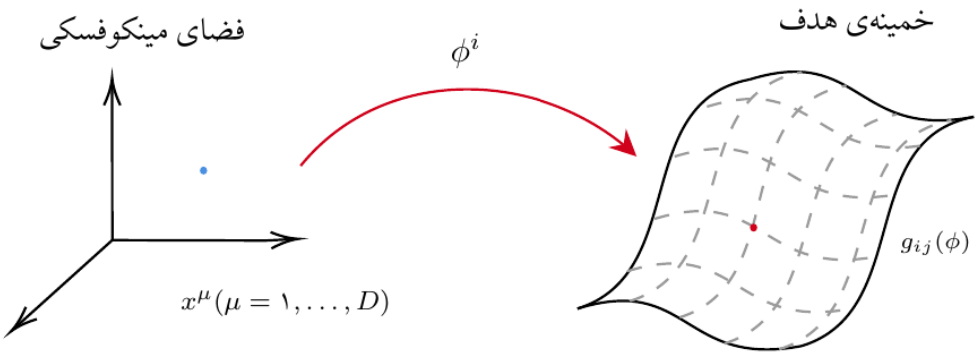
[۲] یا به سیاق فصل ۳ می‌توانیم از کنش بهبودیافته استفاده کنیم تا با وجودِ صفرنشدنِ وردش جمله‌ی مرزی، اصل وردش خوش‌تعریف باقی بماند.

[۳] البته به‌شکل سراسری لزوما A پیمانه خالص نیست و ممکن است هولونومی در کار باشد.

ث‌ـ۲-۱   مدل سیگمای غیرخطی

مدل Wess-Zumino-Witten یک مدل خاص بر مبنای مدل سیگمای غیرخطی است؛ بنابراین ابتدا مختصرا با مدل سیگمای غیرخطی آشنا می شویم.

مدل سیگمای غیرخطی، تعدادی میدان نرده‌ای $(i = ۱, \dots, n)$ ϕ^i دارد که نگاشتی از یک فضازمان تخت(مینکوفسکی) به یک خمینه ی هدف هستند. خمینه‌ی هدف، یک خمینه ریمانی $\mathcal{M}_n$ با بعد حقیقی n است که به یک متریک $g_{ij}(\phi)$ مجهز است. در حقیقت میدان های اسکالر به عنوان مختصات روی خمینه‌ی ریمانی تعریف می شوند و از آنجایی که متریک به میدانهای ϕ (مختصات روی خمینه هدف) بستگی دارد، بنابراین این مدل غیرخطی است.



شکل ث‌ـ۱: میدان ها در یک مدل سیگمای غیرخطی، نگاشتهایی از فضای تخت به یک خمینه هدف هستند.

کنش این مدل به شکل زیر تعریف می شود:

$$S_\sigma[\phi] = \frac{۱}{۴a^۲} \int d^D x \;\; g_{ij}(\phi)\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j \qquad (\text{ث‌ـ}۲\text{-}۱)$$

که در آن $a^۲ > ۰$ ثابت جفتیدگی بدون بعد است.

اما مدل Wess-Zumino-Witten که به اختصار آن را WZW می نامیم؛ یک مدل سیگمای غیرخطی خاص است. در این مدل، خمینه ی هدف یک گروه لی نیمه‌ساده G است؛ همچنین میدان هایی که نگاشت هایی از فضای تخت به این خمینه هدف هستند، ماتریسی هستند که با $g(x)$ آنها را نشان می دهیم.

برای فضای تخت دو بعدی که آن را با Σ نشان می دهیم و دو مختصات (τ, φ) را دارد ؛ کنش مدل

غیرخطی سیگما اینطور نوشته می شود.

$$S_\sigma[g] = \frac{۱}{۴a^۲}\int_\Sigma d^۲x \;\; Tr\big[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu g \partial_\nu(g^{-۱})\big] \qquad \text{(ث\_۲-۲)}$$

توجه کنید که برای این که کنش کمیتی نرده‌ای باشد، باید از ماتریس‌ها یک عدد بسازیم. بنابراین، از فرم کیلینگ روی گروه لی نیمه‌ساده استفاده کرده‌ایم و شرط وجود رد در گروه‌های لی این است که نیمه ساده باشند(حتی اگر فشرده نباشند.)

حالا کمی بیشتر به بررسی این کنش می پردازیم. ابتدا معادله حرکت آن را پیدا می کنیم.

برای ساده سازی کنش توجه می کنیم که :

$$\partial_\nu(g^{-۱}) = -g^{-۱}\partial_\nu g g^{-۱}$$

که به سادگی از رابطه $\partial_\nu(gg^{-۱}) = ۰$ حاصل می شود. با جایگذاری این جمله در کنش به شکل دیگر کنش می رسیم:

$$S_\sigma[g] = \frac{۱}{۴a^۲}\int_\Sigma d^۲x \;\; Tr\big[g^{-۱}\partial_\mu g g^{-۱}\partial^\mu g\big] \qquad \text{(ث\_۲-۳)}$$

این صورت از کنش به وضوح تقارن $g \to g_L\; g\; g_R^{-۱}$ را دارد.

با وردش کنش، معادلات حرکت حاصل می شوند:

$$\begin{aligned}
\delta S_\sigma &= \frac{۱}{۲a^۲}\int_\Sigma d^۲x \;\; Tr\big[\big(-g^{-۱}\delta g g^{-۱}\partial_\mu g + g^{-۱}\delta(\partial_\mu g)\big)g^{-۱}\partial^\mu g\big] \\
&= \frac{۱}{۲a^۲}\int_\Sigma d^۲x \;\; Tr\big[\partial_\mu(g^{-۱}\delta g)g^{-۱}\partial^\mu g\big] \\
&= -\frac{۱}{۲a^۲}\int_\Sigma d^۲x \;\; Tr\big[g^{-۱}\delta g \partial_\mu(g^{-۱}\partial^\mu g)\big]
\end{aligned} \qquad \text{(ث_۲-۴)}$$

پس معادله حرکت $\partial^\nu(g^{-۱}\partial_\nu g) = ۰$ است.

با تغییر مختصات $x^\pm \equiv \tau \pm \varphi$ معادلات حرکت به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\partial_+ J_+ + \partial_- J_- = ۰$$

که در آن $J_\pm = g^{-۱}\partial_\pm g$ است.

می بینیم که جریان های چپ رو و راست رو، به تنهایی پایسته نیستند؛ در حالی که تقارن ضرب از چپ و ضرب از راست، بایستی دو جریان پایستار بدهند؛ به همین دلیل بایستی کنش اصلاح شود [۴] .

[۴] یکی دیگر از دلایل اصلاح نظریه این است که در سطح کلاسیکی این مدل تقارن همدیس دارد، اما بعد از کوانتش، این

ث‍ـ۲ـ۲   افزودن جمله ی Wess-Zumino

برای حل مشکلاتی که در بخش قبلی دیدیم؛ بایستی جمله‌ی زیر را اضافه کنیم [۸۴]،[۸۵]:

$$S = S_\sigma[g] + k\Gamma[G]$$

که در آن k عددی صحیح است و کنش Wess-Zumino یعنی $\Gamma[G]$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\Gamma[G] &= \frac{1}{3}\int_V Tr\Big[\Big(G^{-1}dG\Big)^3\Big] \\ &= \frac{1}{3}\int_V d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho} Tr\Big[G^{-1}\partial_\mu G G^{-1}\partial_\nu G G^{-1}\partial_\rho G\Big]\end{aligned} \qquad (ث‍ـ۲ـ۵)$$

که در آن V یک خمینه سه بعدی است که مرز آن Σ است. همچنین G هم توسعه ی میدانها به خمینه ی سه بعدی V است [۵] برای بررسی معادلات حرکت، وردش کنش را تحت $G \to G + \delta G$ محاسبه می کنیم، پس از استفاده از قضیه استوکس می رسیم به:

$$\delta\Gamma[G] = \int_\Sigma d^2x Tr\Big[\epsilon^{\mu\nu}\delta g g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\Big] \qquad (ث‍ـ۲ـ۶)$$

با ترکیب این معادله حرکت و معادله ای که برای بخش $S_\sigma[g]$ داشتیم، به دست می آوریم:

$$\frac{1}{2a^2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu(g^{-1}\partial_\nu g) - k\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(g^{-1}\partial_\nu g) = 0$$

و با بازنویسی در مختصات مخروط نوری ($\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_t \pm \partial_\phi)$) می رسیم به:

$$(1 - 2a^2k)\partial_+(g^{-1}\partial_+ g) + (1 + 2a^2k)\partial_-(g^{-1}\partial_- g) = 0$$

حال می توانیم از پارامتر k که معرفی کردیم استفاده کنیم و مقدار آن را طوری انتخاب کنیم که جریان ها پایستار شوند.

- اگر $a^2 = -\frac{a}{2k^2}$ آنگاه $k < 0$ و پایستگی جریان راست رو حاصل می شود یعنی $\partial_+ J_+ = 0$
- برای $a^2 = \frac{a}{2k^2}$ حتما k مثبت خواهد بود و پایستگی جریان چپ رو را داریم: $\partial_- J_- = 0$

تقارن شکسته می شود و برای بازگرداندن تقارن همدیس در سطح کوانتومی نیاز به جملات جدید در کنش خواهیم داشت که جمله‌ی Wess-Zumino دقیقا همین‌کار را می‌کند.

[۵] توجه کنید که توسعه ی یک خمینه با داشتن مرزش یکتا نیست، همچنین توسعه ی میدان های g به شکلی که $G\Big|_{\partial V} = g$ هم لزوما یکتا نیست. پس تعریف Γ به شکل فوق دارای ابهام است، اما خوشبختانه در گروه فشرده‌ی $SL(2,\mathbb{R})$ و روی فضای دو بعدی تخت، مشکلی از لحاظ ابهام در تعریف نداریم. برای اطلاعِ بیشتر در این مورد به [۸۶] رجوع کنید.

با انتخاب $a^۲ = -\frac{a}{۲k^۲}$ به کنش WZW می رسیم که گاهی آن را WZNW هم می گویند.

$$S_{WZW}[g] = \frac{k}{۲}\int d^۲xTr\left[\eta^{\mu\nu}g^{-۱}\partial_\mu g g^{-۱}\partial_\nu g\right] + k\Gamma[G] \quad (\text{ث}-۲-۷)$$

جوابهای معادله حرکت این کنش یعنی $\partial_+(g^{-۱}\partial_- g) = ۰$ به شکل $g = \theta_+(x^+)\theta_-(x^-)$ هستند که توابع $\theta_+(x^+)$ و $\theta_-(x^-)$ دلخواه هستند.

همچنین این مدل دو جریان پایستار دارد که به $J_- \equiv g^{-۱}\partial_- g$ و $\bar{J}_+ \equiv -\partial_+ g g^{-۱}$ هستند. می توان به سادگی دید که این کنش تحت تبدیل $g \to \Theta_+(x^+)g\Theta_-^{-۱}(x^-)$ ناورداست و جریان های پایسته این تبدیل همان دو جریانی است که آورده شد. بنابراین کاری که با افزودن جمله ی Wess-Zumino کردیم مثل این بود که یک تقارن سرتاسری را پیمانه ای کردیم.